ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Δευτέρα 10 Ιουνίου 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. (α) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ.15

(β) (i) Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη αν η f είναι $1-1$.

(ii) Εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγουμένου τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.
Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g:f(A)\to\mathbb{R}$
με την οποία κάθε $y\in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:
– έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f
– έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
– ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x.$$

Α2. Θεώρημα (Fermat) σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Α3.Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 135

Α4.α) Ο ισχυρισμός είναι λάθος .

Αιτιολόγηση :

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-1 \ , & x<0\\ \ \ 1 \ , & x>0\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(β) Ο ισχυρισμός είναι λάθος

Αιτιολόγηση:

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{αν} \quad x\neq 1\\ 3, & \text{αν} \quad x=1\end{cases}$ έχουμε : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$, ενώ $f(1)=3$.

Α5). Σωστή επιλογή είναι η γ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφόσον η $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $(+\infty)$ ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}+\lambda\right)=0+\lambda=\lambda$, άρα $\lambda=2$

Β2. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x \Leftrightarrow g(x)=e^{-x}-x+2, x\in\mathbb{R}$.

Η g συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{aligned} &g(2)=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0\\ &g(3)=e^{-3}-3+2=\frac{1}{e^3}-1=\frac{1-e^3}{e^3}<0\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(2)\cdot g(3)<0$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$

Επίσης $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η g γνησίως φθίνουσα, οπότε η $x=x_0$ μοναδική λύση.

Β3. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1 – 1 και αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(-\infty,+\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=(2,+\infty) \text{ διότι :}$$

Από υπόθεση $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}+2\right)=+\infty$

Επομένως $A_{f^{-1}}=(2,+\infty)$

Για την εύρεση του τύπου της f^{-1} έχουμε

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=e^{-x}+2\Leftrightarrow y-2=e^{-x}\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2).$$

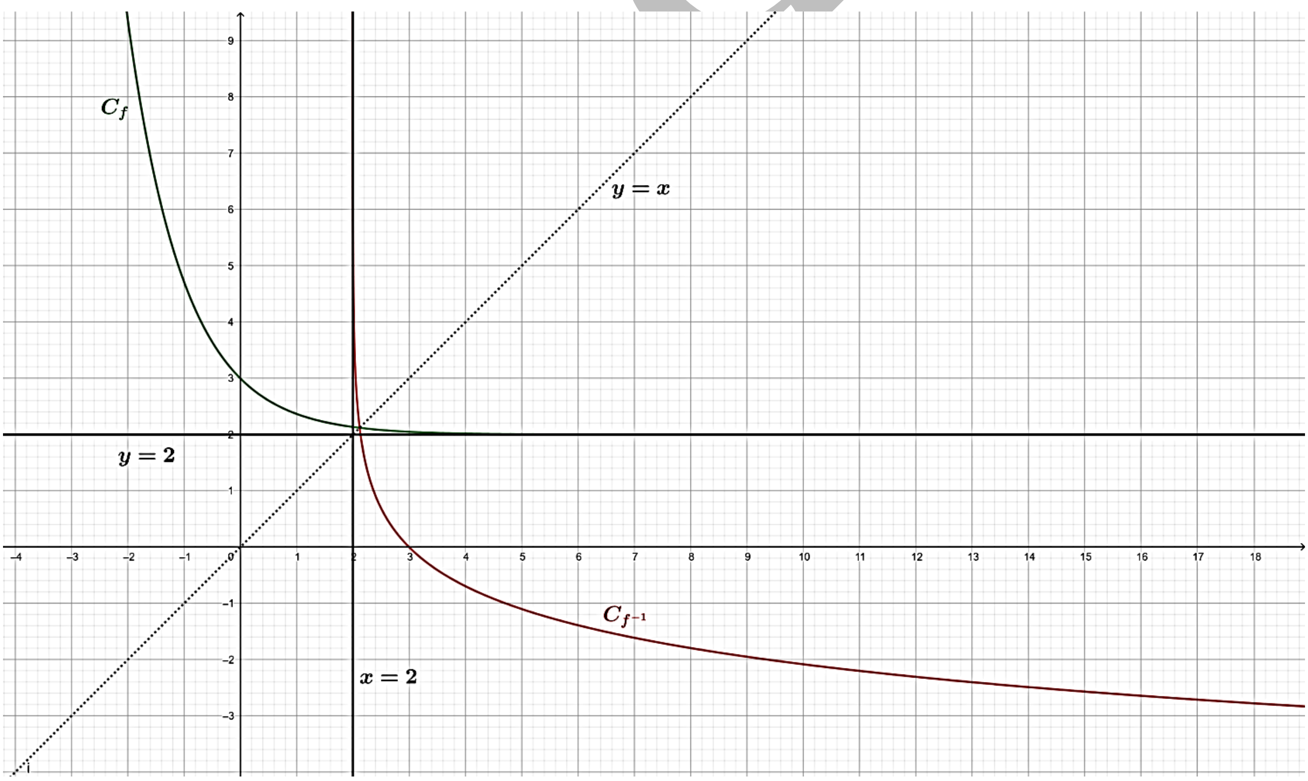
Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$

Β4. Ελέγχουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(-\ln(x-2)\right)=+\infty.$

διότι θέτοντας $u=x-2$ τότε $u_0=\lim\limits_{x\to2^+} u=\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0^+$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to2^+}\left(-\ln(x-2)\right)=\lim\limits_{u\to0^+}(-\ln u)=+\infty.$ Άρα η $x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα θα είναι και συνεχής .

Επομένως

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x),\ (1)$$

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1+\alpha$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1+\beta$
- $f(1) = 1+\alpha$

Άρα λόγω της (1) θα είναι $1+\alpha = 1+\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη τότε $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \in \mathbb{R}$ (2)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

και

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1} \overset{\alpha=\beta}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\alpha\right) = 1+\alpha$$

Επομένως λόγω της (2) έχουμε $1+\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$. και επειδή $\alpha = \beta$ άρα $\beta = 1$.

Γ2. Για $x>1$ έχουμε : $f'(x) = 2x > 0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

Για $x<1$ έχουμε : $f'(x) = e^{x-1}+1 > 0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $A = R$.
Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = R$

$f(A) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty,+\infty)$ αφού : $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{e^x}{e}+x) = +\infty$

Γ3.

i. Ο αριθμός 0 (μηδέν) ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ το οποίο είναι μοναδικό διότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα .

όμως $f(0)=\frac{1}{e}>0$ άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>\frac{1}{e}$ επομένως το $x_0 \notin (0,+\infty)$ και επειδή υπάρχει άρα $x_0 \in (-\infty,0)$

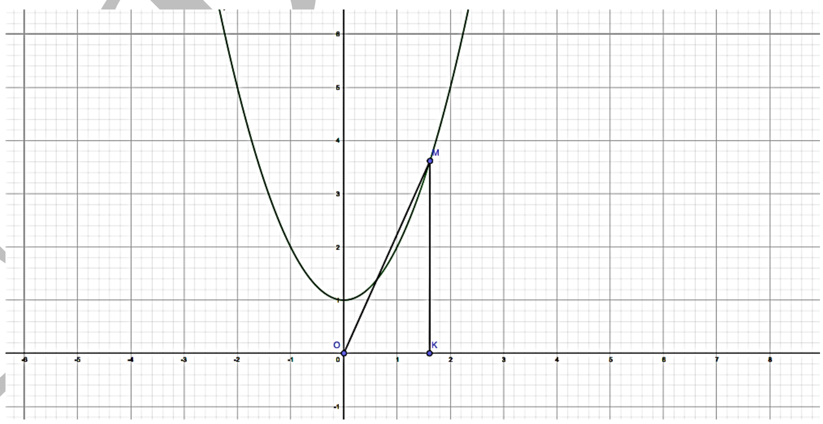
ii. Η εξίσωση $f^2(x)-x_0\cdot f(x)=0$ με $x\in(x_0,+\infty)$ ισοδύναμα γράφεται:

$$f^2(x)-x_0\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \text{ ή } f(x)=x_0<0$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι αδύνατες στο $(x_0,+\infty)$ διότι :

Για $x\in(x_0,+\infty)$ έχουμε $x>x_0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$

Γ4. Με βάση το διπλανό σχήμα έχουμε:



$$E=\frac{OK\cdot MK}{2}=\frac{x(x^2+1)}{2}=\frac{1}{2}(x^3+x)$$

$E=E(t)$ τότε $E(t)=\frac{1}{2}((x(t))^3+x(t))$

άρα

$$E'(t)=\frac{1}{2}((x(t))^3+x(t))'=\frac{1}{2}(3(x(t))^2\cdot x'(t)+x'(t)).$$

Την χρονική στιγμή $t=t_o$, ισχυει $E'(t_o)=\frac{1}{2}(3(x(t_o))^2\cdot x'(t_o)+x'(t_o))=\frac{1}{2}(6(x(t_o))^2+2)=28\tau\mu/\sec$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφόσον η ευθεία $y=-x+2$ είναι η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο της $A(1,1)$ ισχύει

$$f(1)=1 \text{ και } f'(1)=-1$$

Υπολογίζοντας βρίσκουμε : $f(1)=\alpha+\beta$ άρα $\alpha+\beta=1$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha \Leftrightarrow f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha.$$

$f'(1)=\alpha$ άρα $\alpha=-1$ και εφόσον $\alpha+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=2$

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx$

Θεωρούμε : $\varphi(x)=f(x)-x+2 \Leftrightarrow \varphi(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)$

$\varphi(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right]>0 \Leftrightarrow x>1$

διότι $(x-1)^2+1\geq 1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$

Άρα το εμβαδόν είναι : $E=\int_1^2(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$.

Θέτω $x^2-2x+2=y$ οπότε $(2x-2)dx=dy \Leftrightarrow 2(x-1)dx=dy \Leftrightarrow (x-1)dx=\frac{1}{2}dy$.

Για $x=1$: $y=1$ και $x=2$: $y=2$

$$E=\int_1^2\frac{1}{2}\cdot\ln y\,dy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y\right)'\cdot\ln y\,dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y\ln y\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}y\frac{1}{y}dy=\left[\frac{1}{2}y\ln y\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}dy=\left[\frac{1}{2}y\ln y\right]_1^2-\left[\frac{1}{2}y\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$$

Δ3. i. Ισχύει

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}+1=\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\frac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}+1.$$

Παίρνοντας κάθε παράσταση χωριστά έχουμε :

$\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$

$\dfrac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ παίρνουμε :

$$\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\frac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}\geq 0\Leftrightarrow\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\frac{2\left(x-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2+1}-1\geq -1\Leftrightarrow f'\left(x\right)\geq -1$$

Η ισότητα ισχύει για $x=1$.

<u>Παρατήρηση :</u>

Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f' έχει ελάχιστο στη θέση $x=1$ το -1 χρησιμοποιώντας το πρόσημο και τις ρίζες της f''

ii. Ισοδύναμα η προς απόδειξη ανίσωση γίνεται

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq\left(\lambda-1\right)\cdot\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq f\left(\lambda\right)+\lambda-2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f\left(\lambda\right)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2}\geq f\left(\lambda\right)+\lambda\ \ (1)$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε την (1)

Θεωρώ τη συνάρτηση $k\left(x\right)=f\left(x\right)+x,\ x\in\mathbb{R}.$

Τότε $k'\left(x\right)=f'\left(x\right)+1\overset{(i)}{\geq}0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ Άρα η k είναι γνησίως αύξουσα επομένως από την (1) παίρνουμε $k\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq k\left(\lambda\right)\overset{k:\text{γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow}\lambda+\frac{1}{2}\geq\lambda$ η οποία ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

<u>Παρατήρηση :</u>

Το ερώτημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και με χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right]$

Δ4.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο τυχαίο σημείο της $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$ είναι :

$$y-f(\alpha) \Leftrightarrow f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y=f'(\alpha)x-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο τυχαίο σημείο της $B\big(\beta, g(\beta)\big)$ είναι :

$$y-g(\beta) \Leftrightarrow g'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y=g'(\beta)x-\beta g'(\beta)+g(\beta)$$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη θα πρέπει να ταυτίζονται οι δύο ευθείες δηλαδή

$$f'(\alpha)=g'(\beta)$$

και

$$-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)=-\beta g'(\beta)+g(\beta)$$

Από **(Δ3. i.)** ισχύει $f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$
Επιπλέον, η $g'(x)=-3x^2-1\leq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$
Άρα $f'(\alpha)\geq -1\geq g'(\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha=1$ και $\beta=0$
Για $\alpha=1$ και $\beta=0$ επαληθεύεται και η $-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)=-\beta g'(\beta)+g(\beta)$ άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στα σημεία $A\big(1, f(1)\big)$ και $B\big(0, g(0)\big)$ η οποία είναι η $y=-x+2$