



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ Μ.Ε.

ΠΑΝΑΠΩΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΚΑΛΛΙΓΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε σχολικό σελ. 335

A2. Βλέπε σχολικό σελ. 246

A3. Βλέπε σχολικό σελ. 222

A4. $\Lambda - \Sigma - \Sigma - \Lambda - \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

i) $(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2 \Leftrightarrow$

$$|z - 2|^2 + |z - 2| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|z - 2|^2 + |z - 2| - 2 = 0$$

Άρα $|z - 2| = -2$ απορρίπτεται
ή

$$|z - 2| = 1$$

$$|z| = |(z - 2) + 2| \leq |z - 2| + 2 = 3$$

Άρα $|z| \leq 3$

$$\text{ii) } z_1 = \frac{-\beta}{2} + \frac{\sqrt{|\beta^2 - 4\gamma|}}{2} i = \frac{-\beta}{2} + \frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2} i$$

$$z_2 = \frac{-\beta}{2} - \frac{\sqrt{|\beta^2 - 4\gamma|}}{2} i = \frac{-\beta}{2} - \frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2} i$$

$$\bullet |Im(z_1) - Im(z_2)| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|\sqrt{4\gamma - \beta^2}| = 2 \Leftrightarrow$$

$$4\gamma - \beta^2 = 4 \quad (1)$$

$$\bullet M(z_1) \in \text{κύκλος} \xrightarrow{B_1} |z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{-\beta}{2} + \frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2} i - 2 \right| = 1 \Leftrightarrow |-\beta - 4 + \sqrt{4\gamma - \beta^2} i| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\beta + 4)^2 + (4\gamma - \beta^2) = 4 \Leftrightarrow$$

$$2\beta + \gamma = -3 \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \rightarrow \beta = -4, \gamma = 5$$

iii)

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0 \rightarrow$$

$$|v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| \rightarrow$$

$$|\alpha_i| \leq 3$$

$$|v|^3 \leq |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0| \rightarrow$$

$$|v|^3 \leq 3 |v|^2 + 3 |v| + 3 \rightarrow$$

$$|v|^3 < 3 |v|^2 + 3 |v| + 4 \Leftrightarrow$$

Horner

$$|v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0 \longleftrightarrow$$

1	-3	-3	-4	4
	4	4	4	
1	1	1	0	

$$(|v|^2 + |v| + 1) > 0$$

$$(|v| - 4) \cdot (|v|^2 + |v| + 1) < 0 \longleftrightarrow$$

$$|v| - 4 < 0 \longleftrightarrow |v| < 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \longleftrightarrow$

$$(f(x) + x)(f(x) + x)' = x \longleftrightarrow$$

$$\left[\frac{(f(x) + x)^2}{2} \right]' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' \rightarrow$$

$$\frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \xrightarrow{x=0} c = \frac{1}{2}$$

$f(0) = 1$

$$\text{Άρα } \frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \longleftrightarrow$$

$$(f(x) + x)^2 = x^2 + 1$$

Όμως $x^2 + 1 > 0$ άρα $(f(x) + x)^2 > 0 \longleftrightarrow f(x) + x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρώ $h(x) = f(x) + x$

h : συνεχής ως άθροισμα συνεχών και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο κι επειδή $h(0) = f(0) = 1 > 0$ είναι $h(x) > 0$

$$\text{άρα } f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \longleftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

Γ2. Είναι $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0)$

Θα δείξουμε ότι η f είναι “1 – 1”.

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Είναι $\sqrt{x^2+1} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$x - \sqrt{x^2+1} < 0$$

$$x < \sqrt{x^2+1} \text{ γιατί}$$

αν $x < 0$ τότε προφανώς ισχύει ($x < \sqrt{x^2+1}$)

$$- < +$$

Αν $x \geq 0$ τότε $x < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 < x^2+1 \Leftrightarrow$ ότι ισχύει

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f \downarrow \mathbb{R}$

και άρα f “1 – 1”. Οπότε από $f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0$

$$\text{Είναι } g'(x) = 3x^2 + 3x$$

x		-1		0
g'		+	-	+
g	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
		T.M.		T.E.

Η g είναι $\uparrow$ στα $(-\infty, -1]$, $[0, +\infty)$ και $\downarrow$ $[-1, 0]$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $-\frac{1}{2}$ και τοπικό ελάχιστο στο 0 το -1 .

$$g(-1) = -\frac{1}{2} \quad g(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{Θεωρώ } A_1 = (-\infty, -1) \rightarrow g(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -1} g(x)) = (-\infty, -\frac{1}{2})$$

$$g \uparrow A_1$$

Το $0 \notin g(A_1)$ άρα $g(x) = 0$ δεν έχει ρίζα το A_1

$$\text{Επίσης } A_2 = [-1, 0] \rightarrow g(A_2) = [g(0), g(-1)] = [-1, -\frac{1}{2}]$$

$$g \downarrow A_2$$

Το $0 \notin g(A_2)$ άρα η $g(x) = 0$ δεν έχει ρίζα το A_2

$$\text{Τέλος } A_3 = (0, +\infty) \rightarrow g(A_3) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = (-1, +\infty)$$

$$g \uparrow A_3$$

Επειδή $0 \in g(A_3)$ η $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο A_3 κι επειδή $g \uparrow A_3$ η ρίζα είναι μοναδική.

$$\text{Γ3. Έχω την εξίσωση } \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f(x - \frac{\pi}{4}) \epsilon \phi x \Leftrightarrow$$

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f(x - \frac{\pi}{4}) \epsilon \phi x = 0$$

$$\text{Θέτω } h(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f(x - \frac{\pi}{4}) \epsilon \phi x$$

Η h είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ καθώς οι $\epsilon \phi x$, $f(x - \frac{\pi}{4})$ είναι συνεχής και

$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt$ παραγωγίσιμη και άρα συνεχής.

$$\text{Επίσης } h(\frac{\pi}{4}) = \int_0^0 f(t) dt - f(0) \epsilon \phi \frac{\pi}{4} = -1 < 0$$

$$\text{Τέλος } h(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f(-\frac{\pi}{4}) \epsilon \phi 0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt > 0 \text{ γιατί έχουμε δείξει από (Γ2)}$$

$$\text{ότι } x < \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt > 0$$

$$0 > -\frac{\pi}{4}$$

Για την h στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4}) : h(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f(x_0 - \frac{\pi}{4}) \epsilon \phi x_0$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - 1 + 1 - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+5h) - 1}{h} - \frac{f(1-h) - 1}{h} \right) = 0$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - 1}{h} = 5 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{u} = 5 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = 5f'(1)$$

Θέτω $5h = u$

$h \rightarrow 0, u \rightarrow 0$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - 1}{h} = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{u} = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = -f'(1)$$

Θέτω $-h = u$

$h \rightarrow 0, u \rightarrow 0$

$$\text{Άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+5h) - 1}{h} - \frac{f(1-h) - 1}{h} \right) = 0 \Leftrightarrow 5f'(1) + f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(1) = 0$$

Άρα $f' \uparrow$ στο $(0, +\infty)$ με $f'(1) = 0$ τότε $x = 1$ μοναδική ρίζα

Άρα

x	0	1	$+\infty$
f'	$\nearrow$	$\nearrow$	
f'	-	+	
f	$\searrow$	$\nearrow$	

τ.ε.

$f \uparrow$

$$\text{για } x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$f \uparrow$

$$\text{για } x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$. Το $f(1) = 1$

Δ2. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε είναι και συνεχής. Άρα η $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών, επομένως η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ τότε για $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 1$

Άρα $g'(x) > 0$ επομένως $g \uparrow$ στο $(1, +\infty)$

Θέτω $h(x) = \int_x^{x+1} g(u) du$, με $x \in (1, +\infty)$

Έχουμε $h(x) = \int_2^{x+1} g(u) du - \int_2^x g(u) du$, η h είναι παραγωγίσιμη διότι η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, με

$$h'(x) = g(x+1) - g(x)$$

$g \uparrow$
Έχουμε $x+1 > x \Leftrightarrow g(x+1) > g(x) \Leftrightarrow g(x+1) - g(x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$

Άρα $h \uparrow$ στο $(1, +\infty)$

Η ανίσωση $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du$ γίνεται

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+5+1} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+5+1} g(u) du \Leftrightarrow h(8x^2+5) > h(2x^4+5) \Leftrightarrow$$

$$8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 4x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x^2		+	+	+	+
$x^2 - 4$		+	-	-	+
Γ		+	-	-	+

Άρα $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$

Δ3.

Αφού f παραγωγίσιμη τότε $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη, με $g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f(x) + 1}{(x-1)^2}$.

$$x-1 > 0$$

Για να δείξουμε ότι g κυρτή αρκεί το $f'(x)(x-1) - f(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > \frac{f(x)-1}{x-1}$. (1)
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, x]$

f συνεχής $[1, x]$

f παραγωγίσιμη $(1, x)$

}
 $f' \uparrow$

$$\text{άρα υπάρχει } \xi \in (1, x) : f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)-1}{x-1}$$

Άρα η (1) γίνεται : $f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow x > \xi$ που ισχύει διότι $\xi \in (1, x)$

$$\alpha - 1 > 0$$

Έχουμε την εξίσωση : $(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha) \Leftrightarrow$

$$g(x) = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} (x - \alpha) \Leftrightarrow g(x) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow g(x) - g'(\alpha)(x - \alpha) = 0$$

Θέτω $\phi(x) = g(x) - g'(\alpha)(x - \alpha)$, με $x > 1$.

Η εξίσωση $\phi(x) = 0$ έχει προφανή ρίζα το $x = \alpha$ διότι

$$\phi(\alpha) = g(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} \frac{f(t)-1}{t-1} dt = 0$$

Αρκεί να δείξω ότι είναι μοναδική

Η ϕ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων με $\phi'(x) = g'(x) - g'(\alpha)$

Έχουμε $\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = g'(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha$, διότι g κυρτή, άρα $g' \uparrow$

επομένως $g' \uparrow 1 - 1$.

x	1	α	$+\infty$
$\phi'(x)$	$-$	$+$	
$\phi(x)$	$\rightarrow$	$\nearrow$	

$$g' \uparrow$$

$$x > \alpha \Leftrightarrow g'(x) > g'(\alpha) \Leftrightarrow g'(x) - g'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \phi'(x) > 0$$

$$g' \uparrow$$

$$x < \alpha \Leftrightarrow g'(x) < g'(\alpha) \Leftrightarrow g'(x) - g'(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \phi'(x) < 0$$

Άρα η ϕ έχει ολικό ελάχιστο για $x = \alpha$ επομένως ισχύει ότι :

$$\phi(x) \geq \phi(\alpha) \Leftrightarrow \phi(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και } \phi(x) = 0 \text{ μόνο για } x = \alpha.$$

Σχόλιο φροντιστηρίου:

Το διαγώνισμα κρίνεται απαιτητικό με πολλές πράξεις και προυπέθετε εμβάθυνση της ύλης για να μπορέσει κάποιος να ανταποκριθεί ικανοποιητικά. Απαιτητικό ήταν και το δεύτερο θέμα, ειδικότερα, το Β3 κρίνεται εκτός της φιλοσοφίας και του σκοπού των εξετάσεων.

Επιμέλεια :

Παναγιωτόπουλος Ευάγγελος

Λύτρας Ευστάθιος

Σιώζιου Ιωάννα

Μπαϊρακτάρης Ιωάννης

Βούκας Παύλος