<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 262.
Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 141.
Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 246.
Α4. α) Λ, β) →Σ , γ) →Λ , δ) Σ, ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή.

$$f(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′	-	0	+
f	↘		↗
		Τοπ. Ελάχιστο f(0)=0	

Έτσι προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$.

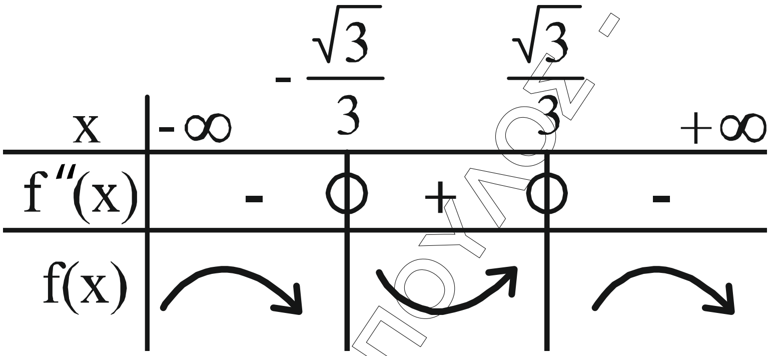
Β2. $$f''(x)=\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+1)^2-2x\left[(x^2+1)^2\right]}{(x^2+1)^4}=$$

$$= \frac{2(x^2+1)^2 - 2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)\left[2(x^2+1) - 8x^2\right]}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)\left(2x^2+2-8x^2\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)(2-6x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(1-3x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(x^2+1)^4}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$F(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1/4 \qquad F(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1/4$$

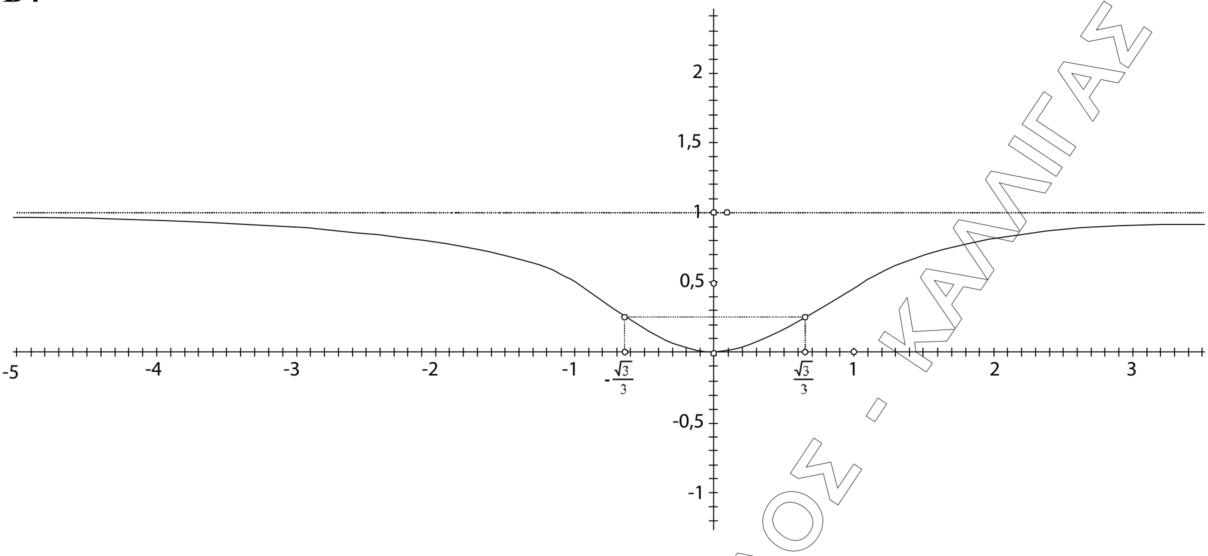
Προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στα $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}][\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,

ενώ παρουσιάζει Σ.Κ. στις θέσεις $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B3 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $K(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$

$K(0) = e^0 - 1 = 0$

$K'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x\left(e^{x^2} - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$

$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι:

$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0$

Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
2x	-	0	+
$e^{x^2}-1$	+	0	+
$K'(x)$	-	0	+
$K(x)$	↘	min=0	↗

Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι $K(x) > 0$, ενώ $K(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Γ2

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) \neq 0$, λόγω του ερωτήματος Γ1.

Έτσι η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτά, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- Για $x\in(0,+\infty)$: $\left(f(x)-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\right)\cdot\left(f(x)+\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\right)=0$ (1)

Αν $f(x)>0$, τότε επειδή $e^{x^2}-x^2-1>0$, από την (1) προκύπτει ότι

$f(x)-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)=0\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Αν $f(x)<0$, τότε επειδή το $-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)<0$, από την (1) προκύπτει ότι

$f(x)+\left(e^{x^2}-x^2-1\right)=0\Leftrightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$.

- Για $x\in(-\infty,0)$

Αν $f(x)>0$, τότε από την (1) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Αν $f(x)<0$, τότε από την (1) $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

Για $x=0$ είναι $f(0)=0$.

Έτσι προκύπτει ότι

α) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή

β) $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$ ή

γ) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0\end{cases}$ ή

δ) $f(x)=\begin{cases} -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0\end{cases}$

Γ3. $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

$f''(x)=2e^{x^2}+2xe^{x^2}\cdot 2x-2=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2\cdot e^{x^2}$

Προκύπτει ότι $f''(0)=0$, ενώ επειδή στο ερώτημα Γ1, αποδείχθηκε ότι $e^{x^2}-1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Είναι $f''(x)>0$ *στο* $\mathbb{R}^*$, *και επειδή η f είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x+3)-f(x),\ x\in\mathbb{R}$

Είναι $g'(x)=f'(x+3)-f'(x)=3\dfrac{f'(x+3)-f'(x)}{(x+3)-x}=3f''(\xi)$,

όπου $\xi\in(x,\ x+3)$.

Άρα $g'(x)>0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$, λόγω του Γ3.

Η $g(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και 1-1.

Η δοθείσα εξίσωση τώρα γράφεται $g\left(|\eta\mu x|\right)=g(x)$.

Αφού είναι 1-1, προκύπτει ότι $|\eta\mu x|=x,\ \ x\in[0,+\infty)\Leftrightarrow|\eta\mu x|=|x|,\ \ x\in[0,+\infty)$.

Η ισότητα αυτή ισχύει μόνον όταν $x=0$ (σχολικό βιβλίο σελ. 170).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\eta\mu x\,dx=\pi \Rightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx+\int_0^\pi f''(x)\,\eta\mu x\,dx=\pi$

$\Rightarrow \int_0^\pi f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx+\int_0^\pi (f'(x))'\eta\mu x\,dx=\pi \Rightarrow$

$-\left[\sigma\upsilon\nu x\, f(x)\right]_0^\pi+\int_0^\pi \cancel{\sigma\upsilon\nu x\, f'(x)\,dx}+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi \cancel{f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx}=\pi$

$\Rightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$. (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot \eta\mu x\right)=1\cdot 0=0$.

και αφού f συνεχής στο $x=0 \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, δηλ $f(0)=0$

Άρα από (1) $\Rightarrow f(\pi)=\pi$

Έχουμε $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)}{\eta\mu x}\,\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{f(x)}{\eta\mu x}\,\frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}}$, $x\neq 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}}\right)=1\cdot\frac{1}{1}=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$

δηλ $f'(0)=1$

Δ2 α) Από την σχέση $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ παραγωγίζοντας έχουμε

$e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))f'(x)+e^x$ (2)

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$ τότε

από Θ. Fermat $f'(x_0)=0$ (3)

Από (2) για $x=x_0$ έχουμε: $e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'(f(x_0))f'(x_0)+e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0}=1$

$\Rightarrow x_0=0$.

Επομένως θα είναι $f'(0)=0$ άτοπο διότι $f'(0)=1$

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Αφού f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ και είναι παρ/μη

θα είναι $f'(x)\neq 0$. Όμως η f' είναι συνεχής αφού f 2 φορές παρ/μη

άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f'(0)=1>0 \Rightarrow f'(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

Επομ. f ↑ /$\mathbb{R}$

Δ3 Αφού f συνεχής και γν. αύξουσα

θα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

Όμως $f(\mathbb{R})=\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Έχουμε $\left|\frac{ημx+συνx}{f(x)}\right| = \frac{|ημx+συνx|}{|f(x)|} \le \frac{|ημx|+|συνx|}{|f(x)|} \le \frac{2}{|f(x)|}$

και αφού $f \uparrow$ για $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$.

Έτσι $\left|\frac{ημx+συνx}{f(x)}\right| \le \frac{2}{f(x)} \Leftrightarrow$

$$-\frac{2}{f(x)} \le \frac{ημx+συνx}{f(x)} \le \frac{2}{f(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{f(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{f(x)}=0$. Άρα από Κριτήριο παρεμβολής

θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ημx+συνx}{f(x)}=0$

Δ4 Θέτω $\ln x=u \Rightarrow \frac{1}{x}dx=du$.

• Για $x=1 \Rightarrow u_1=\ln 1=0$

• Για $x=e^{\pi} \Rightarrow u_2=\ln e^{\pi}=\pi$

Έτσι $\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_0^{\pi} f(u)\,du$

Αρκεί ν.δ.ο $0 < \int_0^{\pi} f(u)\,du < \pi^2$ (1)

Η f είναι $\uparrow$ στο $[0,\pi] \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(\pi)$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\pi$ και για $x=0$)

$\Rightarrow f(x) \le \pi \Rightarrow \pi-f(x) \ge 0,\ x\in[0,\pi] \Rightarrow$

$\int_0^{\pi}(\pi-f(x))dx>0$ (γιατί η $\pi-f(x)$ δεν μηδενίζεται παντού στο $[0,\pi]$)

$\Rightarrow \int_0^{\pi}\pi\,dx-\int_0^{\pi}f(x)dx>0 \Rightarrow \pi^2>\int_0^{\pi}f(x)dx$ (2)

Ομοίως $f(x)\ge f(0)=0 \Rightarrow \int_0^{\pi}f(x)dx>0$ (3)

Από (2),(3) $\Rightarrow 0<\int_0^{\pi}f(x)dx<\pi^2$ άρα ισχύει η (1)