



ΘΕΜΑ Α

A1. απόδειξη (σχολικό βιβλίο σελ.28)

A2. ορισμός (σχολικό βιβλίο σελ. 14)

A3. ορισμός (σχολικό βιβλίο σελ.87)

A4. Λ, Σ, Λ, Λ, Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$\begin{aligned}
 \bullet P(\omega_1) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{(x^3+x^2)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

- $f'(x) = \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3} x \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3}$
 $P(\omega_3) = f'(1) = \frac{1}{3}$

B2. Για να δείξουμε ότι $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$ αρκεί να δείξουμε:

I) $\frac{1}{3} \leq P(A')$ και II) $P(A') \leq \frac{3}{4}$

- I) Έχουμε $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ άρα $\{\omega_3\} \subseteq A'$

άρα $P(\omega_3) \subseteq P(A') \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq P(A')$

- II) $P(A') \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \geq \frac{1}{4} = P(\omega_1)$

που ισχύει διότι $\{\omega_1\} \subseteq A$

B3. $P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$

$P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0.$

- $A - B = \{\omega_4\}$

$B - A = \{\omega_3\}$

Άρα $(A-B) \cup (B-A) = \{\omega_3, \omega_4\}$

άρα $P((A-B) \cup (B-A)) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

- $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$B' = \{\omega_2, \omega_4\}$

άρα $A' - B' = \{\omega_3\}$

άρα $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

κλάσεις	Κεντρικές τιμές
$[50, 50+c)$	
$[50+c, 50+2c)$	
$[50+2c, 50+3c)$	
$[50+3c, 50+4c)$	x_4

$$\left. \begin{array}{l} x_4 = 85 \\ \text{όμως } x_4 = \frac{50+4c+50+3c}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 7c + 100 = 170 \Leftrightarrow c = 10$$

Γ2.

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \quad (1)$$

$$\bar{x} = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \quad (2)$$

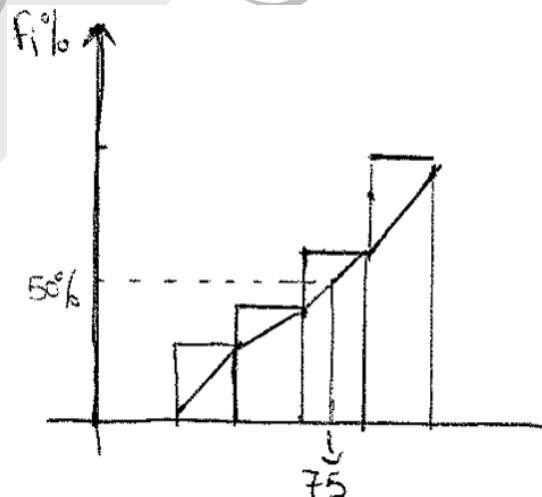
$$f_4 = 2f_3 \quad (3)$$

$\delta = 75 = x_3$ άρα όσες παρατηρήσεις είναι αριστερά είναι και δεξιά του x_3 .

Δηλαδή :

$$f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} + f_4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_1 + f_2 = f_4 \quad (4)$$



$$(1) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} f_4 + f_3 + f_4 = 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow f_3 = 0,2$$

$$(3) \Rightarrow f_4 = 0,4$$

$$(1) \Rightarrow f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_1 = 0,4 - f_2 \quad (5)$$

$$(2) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} 55(0,4 - f_2) + 65f_2 + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4 = 74$$

$$\Leftrightarrow 10f_2 = 3 \Leftrightarrow f_2 = 0,3$$

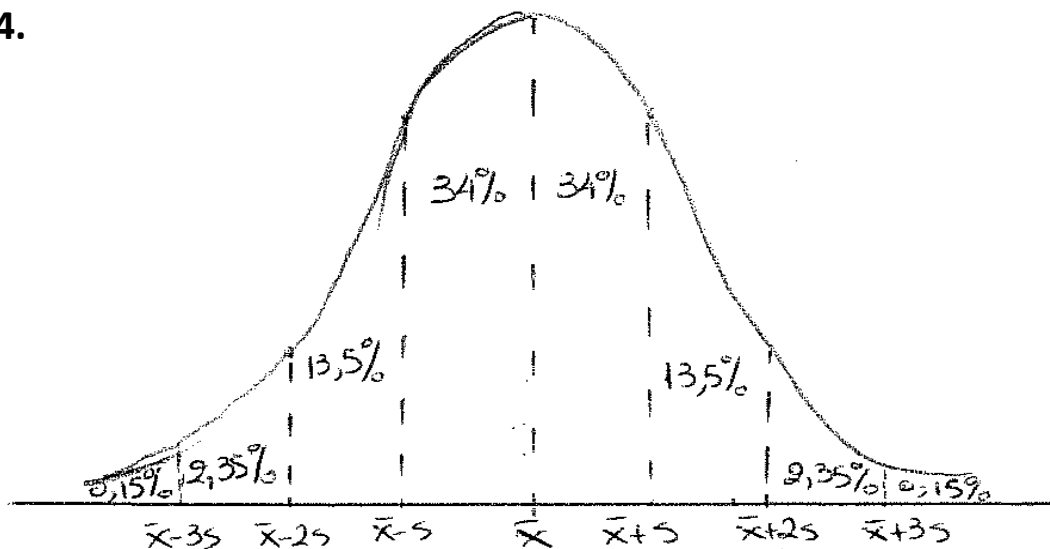
$$(5) \Rightarrow f_1 = 0,1 \text{ επομένως έχουμε τον πίνακα:}$$

κλάσεις	x_i	f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολο	-	1

Γ3. η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i f_i}{\sum_{i=1}^3 f_i} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4.



$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} + 2s = 74 \\ \bar{x} - s = 68 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x} = 70 \\ s = 2 \end{array}$$

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$$

άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \ln x + 1$, $f'(1) = 1$ $f(1) = \kappa$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - \kappa = x - 1 \Leftrightarrow y = x + \kappa - 1, \quad x > 1$$

για $x = 0$: $y = \kappa - 1 > 0$

για $y = 0$: $x = 1 - \kappa < 0$

$$\text{άρα } E = \frac{|\kappa - 1||1 - \kappa|}{2} = \frac{(\kappa - 1)^2}{2}$$

$$\text{έχουμε : } E > 2 \Leftrightarrow \frac{(\kappa - 1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3 \text{ και αφού } \kappa > 1 \text{ και } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ τότε } \kappa = 2.$$

Δ2.

α) Η εξίσωση εφαπτομένης είναι : $y = x+1$

άρα $y_i = x_i + 1$ για κάθε $i = 1, \dots, 50$ επομένως.

$$\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$$

β) Έχουμε : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i + 3 \cdot 20 + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50} x_i - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 31 \cdot 50 = \sum_{i=1}^{50} x_i + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow 31 \cdot 50 = 30 \cdot 50 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow$$

$$15\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3.

$$f(x) = x \ln x + 2$$

$$f'(x) = \ln x + 1 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'		0	
f			

Handwritten signs: minus sign between 0 and 1/e, plus sign between 1/e and +∞. Arrows pointing right from the 1/e column in the f row.

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e} > 0$

Αρχικά διατάσσουμε τις παρατηρήσεις $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(e)$:

Αφού $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ και $f \uparrow$ στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$ τότε :

$0 < f(\frac{1}{e}) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$ και αφού $f'(\frac{1}{e}) = 0$ τότε :

$$f'(\frac{1}{e}) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

$$\text{άρα } R = x_{\max} - x_{\min} = f(e) - f'(\frac{1}{e}) = e + 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης : } \bar{x} &= \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'(\frac{1}{e})}{5} \\ &= \frac{\alpha \ln \alpha + 2 + \beta \ln \beta + 2 + \gamma \ln \gamma + 2 + e + 0}{5} = \frac{\ln \alpha \alpha + \ln \beta \beta + \ln \gamma \gamma + 8 + e}{5} \\ &= \frac{\ln(\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma) + 8 + e}{5} = \frac{\ln e^7 + 8 + e}{5} = \frac{7 + 8 + e}{5} = \frac{15 + e}{5} = 3 + \frac{e}{5} \end{aligned}$$

Δ4.

Για τα στοιχεία του A θέλουμε να ισχύει :

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{e} \text{ άρα : } A = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{30}\}$$

Για τα στοιχεία του B ισχύουν ότι:

$$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t \ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow t \ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow (t-1) \ln t > 0$$

t	0	1	+
t-1	-	0	+
ln t	-	0	+
t	+	+	+

άρα η σχέση $(t-1) \ln t > 0$ ισχύει για κάθε $t \neq 1$ επομένως

$$B = \{t_1, t_2, \dots, t_{29}\}$$

$$\alpha) P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\beta) A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{29}\}$$

$$\text{Άρα } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$$

Επιμέλεια :

Παναγιωτόπουλος Ευάγγελος
Μπαϊρακτάρης Ιωάννης
Λύτρας Ευστάθιος
Βούκας Παύλος
Σιώζιου Ιωάννα