<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ</u>
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄
20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολ. βιβλίο σελ. 31.

Α2. Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνον όταν το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Α3. Ορισμός, σχολ. βιβλίο σελ. 86-87.

Α4. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$ είναι

$\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$, με $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$.

Επειδή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}\subseteq\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ έπεται $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\mathrm{P}(\mathrm{A})\le\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$.

Έτσι προκύπτει $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4},\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{3},\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{1}{2}$.

Β2. $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{5}{12}$.

Για το ενδεχόμενο Α΄–Β΄ είναι:

$\mathrm{A}'-\mathrm{B}'=\mathrm{A}'\cap(\mathrm{B}')'=\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}=\mathrm{B}-\mathrm{A}$.

Άρα $\mathrm{P}(\mathrm{A}'-\mathrm{B}')=\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}-\frac{3}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

Το ενδεχόμενο Δ ισούται με $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'$, οπότε

$\mathrm{P}(\Delta)=\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'\right]=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

B3. Το ενδεχόμενο Ε ισούται με $(A-B)\cup(B-A)$ οπότε

$$P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ .$$

B4. Η εξίσωση $9x^2-3x-2=0$, έχει ρίζες $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$. Άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

Αν τα ενδεχόμενα Β, Γ ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν

$$P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=P(\mathrm{B})+P(\Gamma)\Leftrightarrow P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=\frac{2}{3}+\frac{5}{12}\Leftrightarrow P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=\frac{13}{12}>1,\text{ άτοπο.}$$

Άρα τα Β, Γ δεν μπορεί να είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Από υπόθεση έχουμε ότι $f_1=10\%$, $f_5=30\%$ και

$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 108^\circ = f_3 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow f_3 = \frac{108^\circ}{360^\circ} = 0{,}3$ δηλ $f_3 = 30\%$

Τα κέντρα των κλάσεων είναι $x_1 = 9$, $x_2 = 11$, $x_3 = 13$, $x_4 = 15$ και $x_5 = 17$

Έχουμε ότι $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i \Rightarrow 14 = 9 \cdot 0{,}1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0{,}3 + 15 f_4 + 17 \cdot 0{,}3 \Leftrightarrow$

$14 = 11 f_2 + 15 f_4 + 9{,}9 \Leftrightarrow 11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1$ (1)

Επίσης έχουμε ότι $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Rightarrow 0{,}1 + f_2 + 0{,}3 + f_4 + 0{,}3 = 1 \Leftrightarrow$

$f_2 + f_4 = 0{,}3$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $\begin{cases} 11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1 \\ f_2 + f_4 = 0{,}3 \end{cases}$ λύνοντας το (Σ) βρίσκουμε ότι $f_2 = 0{,}1$ κ'

$f_4 = 0{,}2$. Άρα $f_2 = 10\%$ κ' $f_4 = 20\%$

Γ2 Γνωρίζουμε ότι $s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{5} \nu_i x_i^2 - \bar{x}^2 \Rightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{\nu_i}{\nu} x_i^2 - \bar{x}^2 \Rightarrow$

$s^2 = \sum_{i=1}^{5} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$

Άρα $s^2 = 0{,}1 \cdot 81 + 0{,}1 \cdot 121 + 0{,}3 \cdot 169 + 0{,}2 \cdot 225 + 0{,}3 \cdot 289 - 14^2$

$\Rightarrow s^2 = 202{,}6 - 196 = 6{,}6 \Rightarrow s = \sqrt{6{,}6} \Leftrightarrow s \simeq 2{,}57$

Ισχύει ότι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Rightarrow CV = \frac{2{,}57}{14}$ $\qquad CV \simeq 0{,}18$

δηλ $CV = 18\% > 10\%$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Γ3 Ισχύει $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \nu_i x_i}{\nu} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \nu_i x_i + \nu_5 x_5}{\nu} \Rightarrow$

$14 = \frac{1780 + f_5 \nu x_5}{\nu} \Rightarrow 14\nu = 1780 + 0{,}3 \cdot \nu \cdot 17 \Leftrightarrow$

$14\nu = 1780 + 5{,}1\nu \Leftrightarrow 8{,}9\nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = \frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow \nu = 200$

Γ4 Γνωρίζουμε ότι αν δύο μεταβλητές X, Y συνδέονται με σχέση της μορφής $Y = \alpha X + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ τότε $\bar{y} = \alpha \bar{x} + \beta$ (όπου $\bar{x}, \bar{y}$ οι μέσες τιμές) και $S_y = |\alpha| S_x$ (όπου S_x, S_y οι τυπικές αποκλίσεις τους) (Εφαρμογή Βιβλίου)

Έτσι $\beta_i = \dfrac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha} \Rightarrow \beta_i = \dfrac{1}{S_\alpha}\alpha_i - \dfrac{\bar{\alpha}}{S_\alpha}$ Άρα

$\bar{\beta} = \dfrac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha} - \dfrac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} \Rightarrow \bar{\beta} = 0$

και $S_\beta = \left|\dfrac{1}{S_\alpha}\right| S_\alpha \overset{S_\alpha > 0}{\Rightarrow} S_\beta = \dfrac{1}{S_\alpha} S_\alpha \Rightarrow S_\beta = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το τμήμα $AB = x$, είναι χορδή του κύκλου άρα $0 < x < 2\rho \Leftrightarrow 0 < x < 10$

Η γωνία ΔAB είναι ορθή άρα η χορδή $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου

Έτσι από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $AB = x$, $B\Delta = 10$ και άρα $A\Delta = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB \cdot A\Delta = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = f(x)$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 10)$ με $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} =$

$$\sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50}$ ή $x = -\sqrt{50}$

Επειδή $x \in (0, 10)$ προκύπτει $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολής

x	0		$5\sqrt{2}$		
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	μέγιστο	$\searrow$	

Συμπεραίνουμε ότι για την τιμή $x = 5\sqrt{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο. Για την τιμή αυτή είναι $A\Delta = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$, δηλ. $A\Delta = AB$, οπότε το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο

Δ3 Παρατηρούμε ότι $\sqrt{99} = 1\sqrt{100 - 1^2} = f(1)$

Έτσι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \dfrac{1}{98} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x+1) - f(1)}{x} =$

$$= \frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{100 - 2 \cdot 1^2}{\sqrt{100 - 1^2}} = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} =$$

$$= \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4 Είναι $A-B \subseteq A$, άρα $P(A-B) \le P(A)$

και επειδή $P(A-B) > 0$, $P(A) \le 1$ είναι:

$0 < P(A-B) \le P(A) \le 1 < 5\sqrt{2}$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$

άρα $f[P(A-B)] \le f[P(A)] \Leftrightarrow$

$$P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)} \le P(A)\sqrt{100-P^2(A)} \Leftrightarrow$$

$$0 \le \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \quad (1)$$

Είναι $0 \le P(A-B) \le 1$, άρα $P^2(A-B) \le 1 \Leftrightarrow$

$$-P^2(A-B) \ge -1 \Leftrightarrow 100-P^2(A-B) \ge 99 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{100-P^2(A-B)} \ge \sqrt{99} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Επειδή $0 \le P(A) \le 1$ και

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}, \text{ προκύπτει}$$

$$\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}} < 1.$$

Τελικά $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} < 1$

Όμως η είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$ άρα

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$